Exercices et problèmes

1 Déterminer dans chacun des cas ci-dessous, les nombres complexes z sous forme algébrique.

a. $\dfrac{z-i}{z+i}=2i$.

b. $\dfrac{z+i}{2z}=1-i$.

c. $\dfrac{2z+i}{iz}=\dfrac{2iz}{1-z}$.

2 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Représenter, dans chacun des cas ci-dessous, les points A, B, S, P, I et J d'affixes respectives

z_A, z_B, z_A+z_B , z_Az_B, $\dfrac{1}{z_A}$ et $\dfrac{1}{z_B}$.

a. $|z_A|=3$, $\arg(z_A)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$,

$|z_B|=1$ et $\arg(z_B)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

b. $|z_A|=2$, $\arg(z_A)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$,

$|z_B|=4$ et $\arg(z_B)\equiv\pi\ [2\pi]$.

3 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit $z\neq -i$ et M le point d'affixe z.

On considère le nombre complexe $Z=\dfrac{z-i}{z+i}$.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire.

4 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z.

On considère le nombre complexe $Z=\dfrac{z+1}{z}$.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire.

5 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit z un nombre complexe.

1. Déterminer et construire l'ensemble

$E=\left\{M(z)\in P \text{ tel que } \left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1\right\}$.

2. En déduire l'ensemble

$F=\left\{M(z)\in P \text{ tel que } \left|\dfrac{2\bar{z}-2}{z-i}\right|=2\right\}$.

6 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z)-\arg(z-1)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$.

7 Donner l'écriture algébrique des nombres complexes $2e^{\frac{3i\pi}{2}}$, $-e^{\frac{3i\pi}{4}}$ et $3e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

8 Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes

a. $\left(3e^{-\frac{i\pi}{5}}\right)^3$, $\dfrac{2e^{\frac{i\pi}{5}}}{3e^{i\pi}}$, $\left(e^{\frac{3i\pi}{8}}\right)^4\left(e^{-i\pi}\right)^3$.

b. $-3+3i$, $2\sqrt{3}-2i$, $(1-i)^5$, $\dfrac{1-i+\sqrt{2}}{1+i+\sqrt{2}}$.

9 Soit le nombre complexe

$a=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

1. Donner l'écriture exponentielle de a^2.
En déduire l'écriture exponentielle de a.
2. Donner les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

a. Construire les points A et B d'affixes respectives a et ia^2.

b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixes z tels que $\arg\left(\dfrac{iz+a^2}{z-a}\right)=-\dfrac{11\pi}{12}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Vérifier que O appartient à E. Tracer E.